

Física:
Momento de Inercia y Aceleración Angular

Dictado por:
Profesor Aldo Valcarce

2do semestre 2014

Momento de Torsión (Torque)

La capacidad de un fuerza de hacer girar un objeto se define como torque.

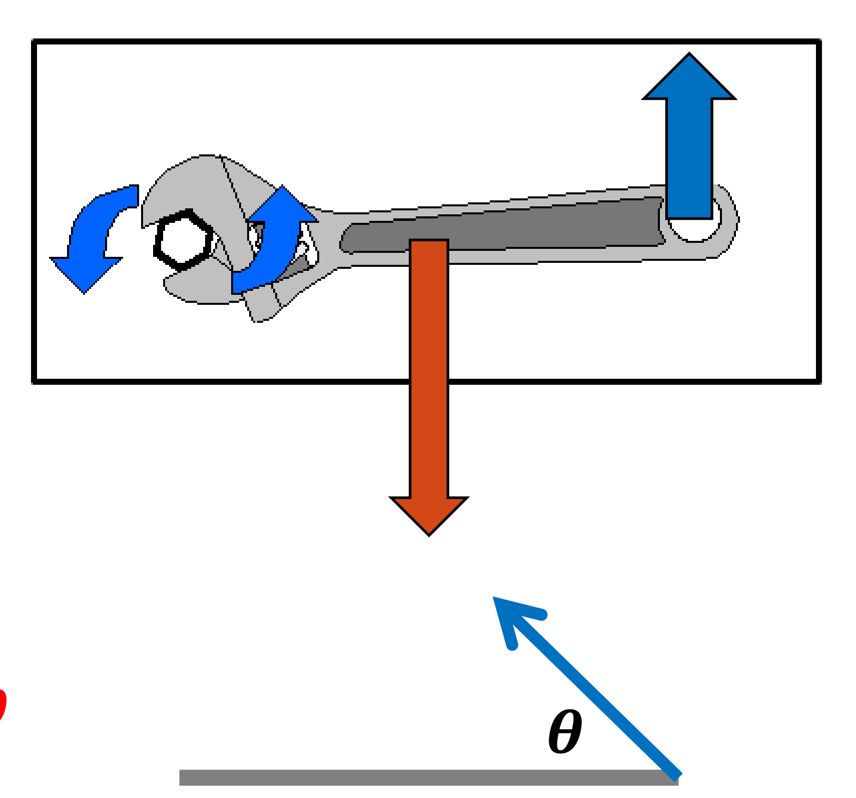
Torque: capacidad de giro que tiene una fuerza aplicada sobre un objeto.

¿De que factores depende el torque?

- Distancia al punto de giro: $\boldsymbol{d}$
- Magnitud de la fuerza: $\boldsymbol{F}$
- Ángulo de aplicación de la fuerza: $\boldsymbol{\theta}$

  Si $\boldsymbol{\theta = 90°}$ máximo torque.

  Si $\boldsymbol{\theta = 0°}$ no hay torque.



Rotación y Torque en el cuerpo



¿Cómo obtener la aceleración angular al aplicar un torque?

Sabemos de la segunda ley de Newton que:

Una fuerza neta sobre un objeto ocasiona una aceleración sobre él, la cual es inversamente proporcional a la masa.

En el movimiento rotacional existe un análogo a la segunda ley de Newton:

Un torque neto sobre un objeto que tiene un punto de rotación fijo ocasiona una aceleración angular sobre él, la cual es inversamente proporcional a cierta cantidad I.

τ y α en una partícula aislada

Una partícula que gira en torno a un centro debido a la acción de fuerzas tangenciales tiene una aceleración tangencial dada por:

$$\sum F_t = m\, a_t$$

Multiplicando por la distancia al centro de rotación:

$$\sum \tau = \sum F_t\, r = m\, a_t\, r = m\,(r\,\alpha)r = m\, r^2\, \alpha$$

Llamando a $m\, r^2 = I$ se tiene que

$$\sum \tau = I\, \alpha$$

τ y α en un conjunto de partículas

Un conjunto de partículas unidas entre si pueden sentir diferentes fuerzas por separado:

$$\boldsymbol{F_i = m_i\, a_i}$$

Por lo cual si están rotando en torno el mismo eje, cada una sentirá un torque dado por:

$$\boldsymbol{\tau_i = r_i\, F_i = m_i\, r_i\, a_i = m_i\, r_i^2 \alpha}$$

Si estas partículas no pueden separarse (pertenecen a un cuerpo rígido) el torque neto que sentirá el cuerpo será:

$$\sum \boldsymbol{\tau_i} = \sum (\boldsymbol{m_i\, r_i^2 \alpha}) = \left(\sum \boldsymbol{m_i\, r_i^2}\right) \boldsymbol{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sum \boldsymbol{\tau = I\, \alpha}$$

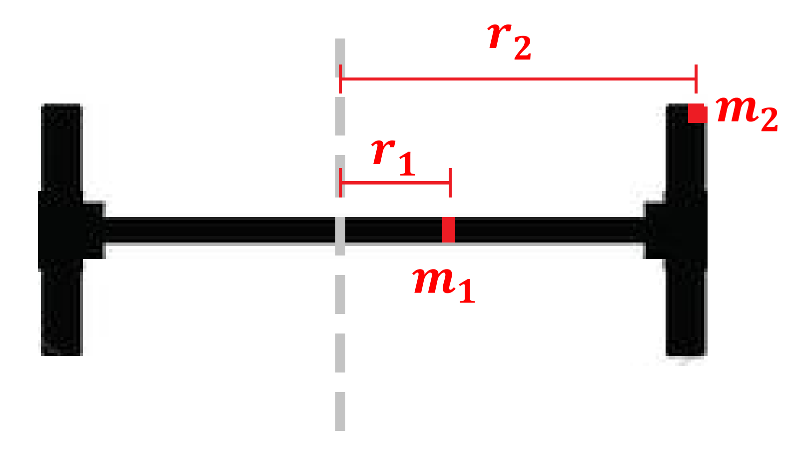
En consecuencia el momento de inercia $I = \sum \boldsymbol{m_i\, r_i^2}$ debe jugar el mismo rol en el movimiento rotacional que la masa en el movimiento traslacional.

Momento de Inercia

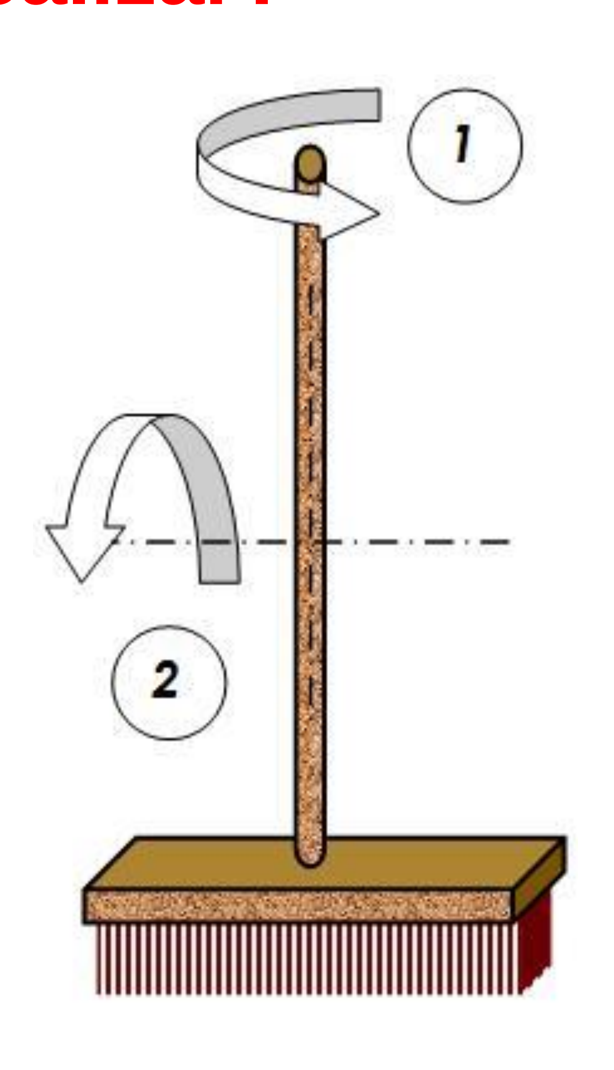
En detalle:

El momento de inercia será la suma individual de cada una de las masas m_i que componen un cuerpo multiplicado por la distancia al cuadrado r_i^2 hacia el eje de rotación:

$$I = \sum m_i r_i^2$$



¿Cuál de los dos giros es más difícil de realizar?



Dado que el momento de inercia

$$I = \sum m_i \, r_i^2$$

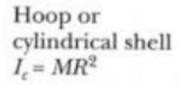
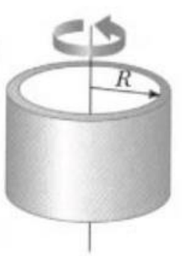
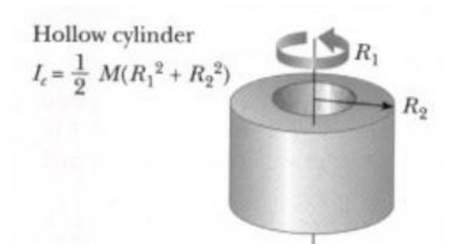
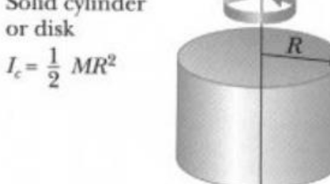
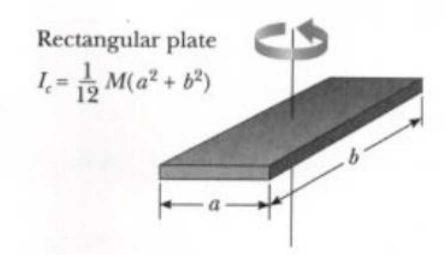
es menor al hacer el giro 1 que al hacer el giro 2 y que

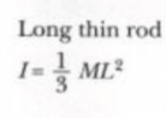
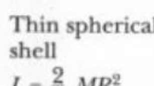
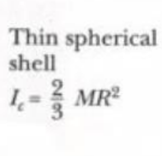
$$\sum \tau = I \, \alpha$$

al aplicar el mismo torque en el giro 1 y en el giro 2 se tendrá más aceleración angular en el giro 1.

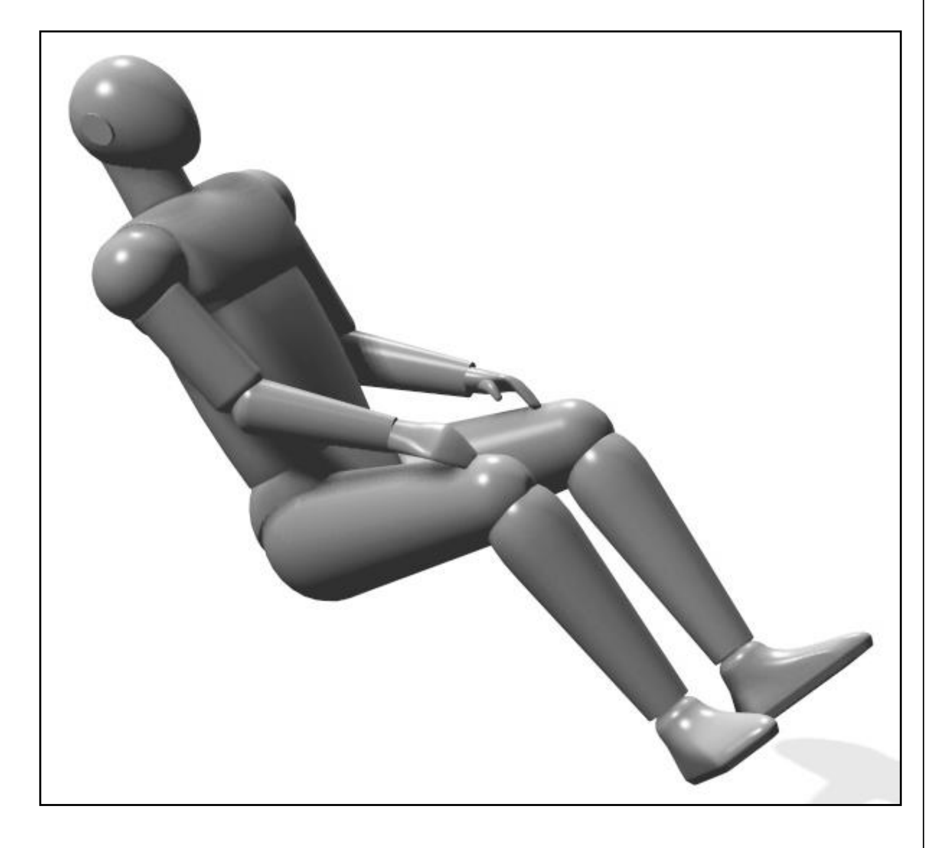
Entonces, mientras más extendido este el cuerpo con respecto al eje de rotación (tiene más momento de inercia) mayor será el torque necesario para obtener la misma aceleración angular.

Algunos momentos de Inercias



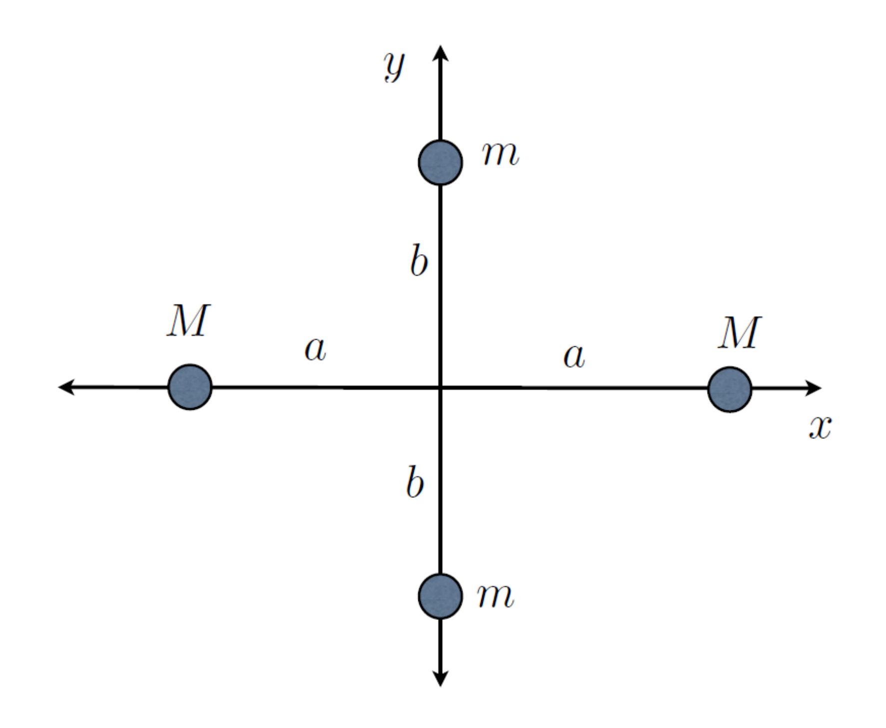


Ejercicio: Momento de Inercia

Calcule el momento de inercia para la siguiente configuración de masas si:

a) Rotan alrededor del eje x

b) Rotan alrededor del eje y



Si $M = 3\,m$ y $a = b/2$:

c) ¿En torno a cuál eje es más fácil rotar el cuerpo?

Centro de Masa

Si se observa un cuerpo que se sostiene desde un punto, se verá que se tiene que balancear bien para evitar que ruede en una o otra dirección.

Se puede concluir que existe un punto desde el cual se puede equilibrar el cuerpo sin que gire. Este punto se denomina centro de masa.



Centro de Masa

El centro de masa de un par de partículas unidas se localiza en algún lugar entre ellas dependiendo de la diferencia que exista entre las masas:

Si $m_1 = m_2$ entonces el centro de masa se encuentra al centro.

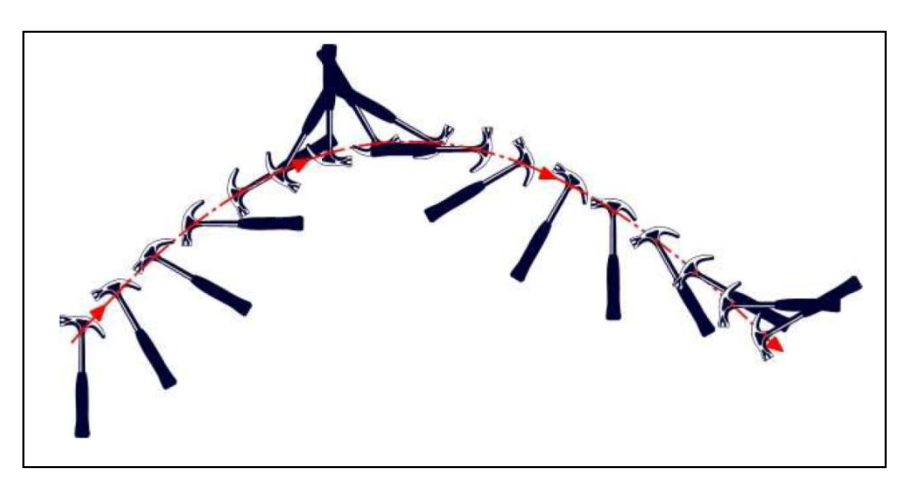
Si $m_1 > m_2$ entonces el centro de masa está más cerca de m_1 y viceversa.

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

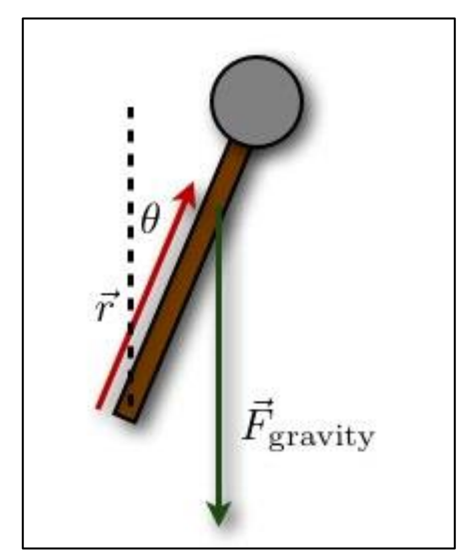
$$\vec{\boldsymbol{r}}_{CM} = \boldsymbol{x}_{CM}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}_{CM}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}_{CM}\widehat{\boldsymbol{k}}$$

Propiedades del centro de masa

El movimiento traslacional del centro de masa de un objeto es el mismo como si toda la masa del objeto estuviera en ese punto.

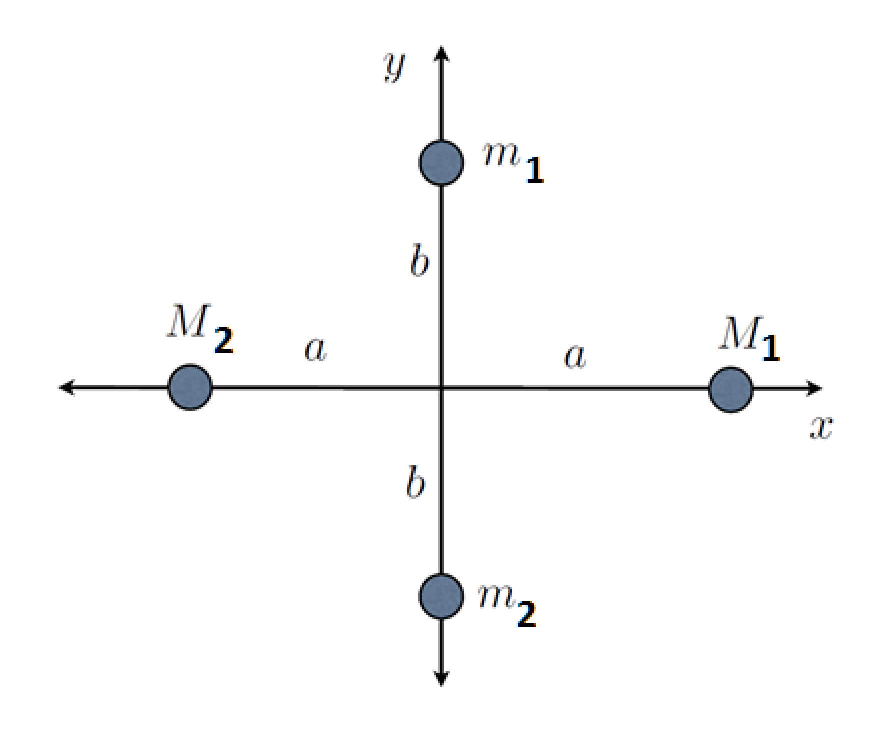


La fuerza de gravedad ejercida sobre el objeto puede ser representada como si fuese siempre ejercida en el centro de masa.



Ejercicio: Centro de Masa

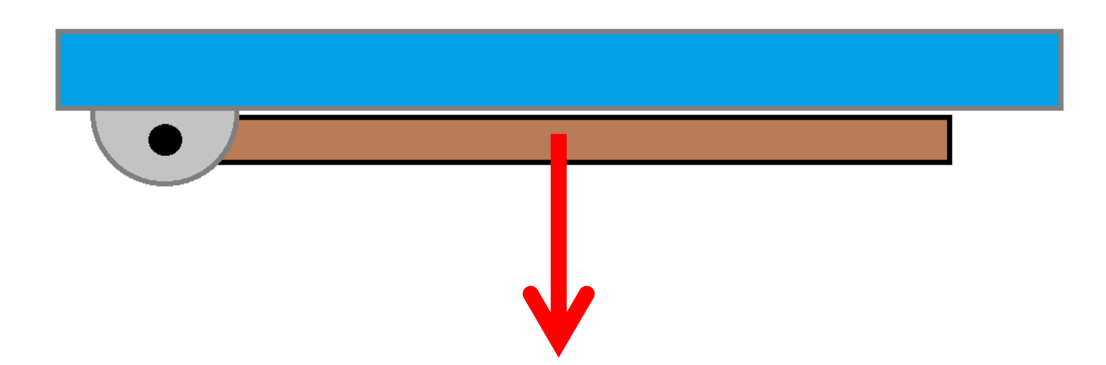
Calcule el centro de masa del siguiente grupo de objetos cuando $a = 10\ cm$, $b = 7\ cm$, $m_1 = 2\ kg$, $m_2 = 3\ kg$, $M_1 = 6\ kg$, $M_2 = 9\ kg$



Ejemplo: torque por gravedad

Una barra de largo $L = 20\ cm$ y masa $M = 15\ kg$ se encuentra ajustada a un pivote como muestra la figura. El centro de masa de la barra se encuentra justo al medio. Si la barra se deja girar libremente entorno al pivote solo por acción de la gravedad, determine:

a) La aceleración angular de la barra al inicio del movimiento.
b) La aceleración angular de la barra cuando la barra forma un ángulo de 30 grados con la horizontal.



Resumen

Relación entre Torque y aceleración angular

$$\sum \tau = I\,\alpha$$

Momento de Inercia

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$

Centro de masa y Torque por gravedad:

En un cuerpo que rota, si el punto de giro no se encuentra exactamente en el centro de masa la gravedad producirá un torque.